1. Sea $\{\vec{X}, \vec{Y}\}$, con $\vec{X}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ y $\vec{Y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$, un conjunto fundamental de soluciones del sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$. Demostrar que si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

entonces el wronskiano $W(t) = W(\vec{X}, \vec{Y})(t)$ es una función constante.
Solución:

2. Considere el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= 7x_1 + x_2 - 7x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_3. \end{cases}$$

a) Determine la solución general de funciones a valores reales.
b) Determine la única solución que satisface la condición inicial $X(0) = (2, 1, 3)^T$.

Solución:

3. Resolver $x^3 y''' - x^2 y'' = 0$ en $(0, +\infty)$.
Solución: La ecuación dada es una ecuación de Euler. Se puede hacer la sustitución $x = e^t$, o sea $t = \ln x$.
Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \\ y'' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} e^{-2t} + \frac{dy}{dt}\left(-e^{-2t}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \cdot e^{-2t} \\ y''' &= \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t}\right] = \left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right) e^{-3t} + \left(2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\left(-2e^{-3t}\right) \\ &= \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) e^{-3t} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación dada, tenemos:

$$\begin{aligned} e^{3t}\left(y''' - 3y'' + 2y'\right) e^{-3t} - e^{2t}\left(y'' - y'\right) e^{-2t} &= 0 \\ y''' - 4y'' + 3y' &= 0 \end{aligned}$$

El polinomio auxiliar es:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) &= 0 \\ \lambda_1 &= 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3. \end{aligned}$$

Entonces la solución general es: $y = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{3t}$
Recordando, que $t = \ln x$, tenemos: $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^3$.

4. Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y^{''} + 3y = e^x + \operatorname{sen}(2x)$.

Solución: Buscamos la solución de la ecuación homogénea, correspondiente a la ecuación dada: $y^{''} + 3y = 0$
El polinomio auxiliar es $p(\lambda)\lambda^2 + 3$ y $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$, entonces la solución de la ecuación homogénea y_h es: $y_h = C_1 \cos\sqrt{3}X + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}X$ como la parte derecha de la ecuación dada consiste de dos sumandos, entonces podemos buscar solución particular y_p como suma de dos: $y_p = y_1 + y_2$, donde y_1 es solución particular de la ecuación $y^{''} + 3y = e^x$, y y_2 es la solución particular de la ecuación $y^{''} + 3y = \operatorname{sen} 2x$
Primero, buscamos y_1 : $y^{''} + 3y = e^x$ (2)
Como 1 no es la raíz de $p(\lambda)$, entonces buscamos la solución en forma $y_1 = Ae^x$
$y_1^{'} = Ae^x$, $y_1^{''} = Ae^x$, sustituyendo en la ecuación (2), tenemos:
$Ae^x + 3Ae^x = e^x$, $\Rightarrow 4A = 1$, entonces, $A = \dfrac{1}{4}$; $\boxed{y_1 = \frac{1}{4}e^x.}$
Luego buscamos y_2 : $y^{''} + 3y = \operatorname{sen} 2x$ como el número $B_i = 2i$ no es la raíz de $p(\lambda)$, entonces:

$$\begin{aligned} y_2 &= A\operatorname{sen} 2x + B\cos 2x \\ y_2^{'} &= 2A\cos 2x - 2B\operatorname{sen} 2x \\ y_2^{''} &= -4A\operatorname{sen} 2x - 4B\cos 2x \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación: $-4A\operatorname{sen} 2x - 4B\cos 2x + 3A\operatorname{sen} 2x + 3B\cos 2x = \operatorname{sen} 2x$
$- A = 1 \Rightarrow A = -1$
$- B = 0 \Rightarrow B = 0$
Entonces: $\boxed{y_2 = -\operatorname{sen} 2x}$
Finalmente, la solución general de la ecuación dada es:

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= y_h + y_1 + y_2, \quad \text{o sea,} \\ y &= C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x + \frac{1}{4}e^x - \operatorname{sen} 2x. \end{aligned}$$

5. Hallar un conjunto fundamental de soluciones reales del sistema

$$\begin{cases} x^{'} = x - 4y \\ y^{'} = 2x + 5y \end{cases}$$

Solución:

6. Resolver $x^3y^{'''} + 2x^2y^{''} + xy^{'} - y = 0$ en $(0, \infty)$.

Solución: La ecuación dada es una ecuación de Euler.
Se puede hacer la sustitución $x = e^t$, o sea $t = \ln x$.

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
y^{'} &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot e^{-t} \\
y^{''} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot e^{-2t} + \frac{dy}{dt}\left(-e^{-2t}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-2t} \\
y^{'''} &= \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}\right] = \left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right)e^{-3t} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\left(-2e^{-3t}\right) \\
&= \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-3t}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación dada, tenemos:

$$\begin{aligned}
e^{3t}\left(y^{'''} - 3y^{''} + 2y^{'}\right)e^{-3t} + 2e^{2t}\left(y^{''} - y^{'}\right)e^{-2t} + e^t y^{'} e^{-t} - y &= 0, \\
\text{Entonces,}\quad y^{'''} - y^{''} + y^{'} - y &= 0
\end{aligned}$$

El polinomio auxiliar es:

$$\begin{aligned}
\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 &= 0, \quad \text{o sea} \\
\lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) &= 0 \\
\left(\lambda^2 + 1\right)(\lambda - 1) &= 0. \\
\lambda_1 &= 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i
\end{aligned}$$

Al sistema fundamental de soluciones forman las funciones: $e^t,\ \cos t,\ \operatorname{sen} t$.
Finalmente, la solución general es:

$$\begin{aligned}
y &= C_1 e^t + C_2\cos t + C_3 \operatorname{sen} t \\
y &= C_1 x + C_2\cos(\ln x) + C_3\operatorname{sen}(\ln x).
\end{aligned}$$

7. Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x^{'} = -x - y + t \\ y^{'} = x - 3y + 1. \end{cases}$$

Solución:

8. Demostrar que si $y(x)$ es solución de $y^{''} + 2by^{'} + b^2 y = 0$, con $b > 0$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

Solución: El polinomio auxiliar es

$$\begin{aligned}
\lambda^2 + 2b\lambda + b^2 &= 0 \\
(\lambda + b)^2 &= 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \\
&= -b
\end{aligned}$$

La solución es:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-bx} + C_2 x e^{-bx}, \quad b > 0 \\ \text{o sea } y &= e^{-bx}(C_1 + C_2 x) \end{aligned}$$

Analizando: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{C_1 + C_2 x}{e^{bx}} = 0\,, \quad b > 0$ ya que la exponencial tiende mucho más rápido al ∞, que el polinomio.

9. Sea φ_p una solución particular del sistema lineal $X^{'} = A(t)X + B(t)$. Demuestre que para toda la solución φ de dicho sistema existe φ_h solución del sistema homogéneo $X^{'} = A(t)X$ tal que

$$\varphi = \varphi_p + \varphi_h.$$

Solución:

10. Hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} x^{'} &= 4x - y \\ y^{'} &= x + 2y \end{cases}$$

que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 9$ y $y(0) = 4$.

Solución:

11. Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x^{'} &= 6x - 3y + e^{5t} \\ y^{'} &= 2x + y + 4. \end{cases}$$

Solución:

12. Resolver la ecuación $y^{''} - 3y^{'} + 2y = 2x^2 + 4e^{3x}$.

Solución:

13. Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x^{'} &= -x - y + t \\ y^{'} &= x - 3y + 1. \end{cases}$$

Solución: